FEUILLE DE TD

Dénombrement, mesures de probabilités

Dénombrement, sommabilité

Exercice 1.
Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments.

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E \setminus A)$?
2. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

• $E \setminus A$ est un ensemble à $n-p$ éléments.
Ainsi, l'ensemble de toutes ses parties, $\mathcal{P}(E \setminus A)$, a pour cardinal 2^{n-p}. C'est un ensemble à 2^{n-p} éléments.
• Soit $a \in A$ et E_a l'ensemble des parties de E qui ne contiennent que a comme élément de A.
On doit alors choisir $k-1$ éléments parmi les $n-p$ qui ne sont pas dans A.
D'où $|E_a| = \sum_{k=1}^{n-p} \binom{n-p}{k-1} = 2^{n-p}$, et E est l'union disjointe des E_a.
D'où le nombre recherché :

$$p2^{n-p}.$$

Autre méthode : On pose Ω l'ensemble des parties contenant un unique élément de A.
On définit la fonction $f : (X,a) \in \mathcal{P}(E \setminus A) \times A \mapsto X \cup \{a\} \in \Omega$.
On vérifie facilement que f est une bijection. On obtient donc que $Card(\Omega) = Card(\mathcal{P}(E \setminus A)).Card(A) = 2^{n-p}.p$.

Exercice 2. Soit $x \in]-1,1[$.

1. Montrer que la famille $(\frac{x^n}{1-x^n})_{n\geq 1}$ est sommable.
2. Montrer que la famille $(x^{n(k+1)})_{(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ est sommable.
   Que vaut sa somme $\sum_{n\geq 1, k\geq 0} x^{n(k+1)}$?
3. On pose $A_p = \{(n,k) \in \mathbb{N}^* \times N \text{ tq } n(k+1) = p\}$, pour $p \geq 1$.
   Vérifier que la famille $(A_p)_p$ est une partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
4. On pose $d(p)$ le nombre de diviseurs de p.
   Calculer $Card(A_p)$.
5. Montrer que l'on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n.$$

---

1. Il faut montrer que la série des $\frac{x^n}{1-x^n}$ est absolument convergente.
   Comme $|x| < 1$ et $n \geq 1$, on a $\frac{|x^n|}{|1-x^n|} \leq \frac{|x|^n}{1-|x|^n} \leq \frac{|x|^n}{1-|x|}$. La série des $|x|^n$ est convergente (série géométrique).
   Donc, la série des $\frac{x^n}{1-x^n}$ est absolument convergente. D'après le cours, la famille $(\frac{x^n}{1-x^n})_{n\geq 0}$ est sommable.
2. On va montrer que $\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0} |x^{n(k+1)}|$ est finie.
   En effet, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} |x^{n+k}| = \dfrac{|x^n|}{1-|x|^n}$. Donc, $\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0} |x^{n(k+1)}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|x^n|}{1-|x|^n} < +\infty$.
   D'après le cours, cela montre que la famille $(x^{n(k+1)})_{(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ est sommable.
   De plus, sa somme vaut :

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0} x^{n(k+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}.$$

3. Les ensembles A_p sont non-vides, sont disjoints, sont inclus dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, et toute paire (n,k) est incluse dans $A_{n(k+1)}$. Ils forment donc une partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
   Il existe autant de couples (n,k) dans A_p que de divieurs de p, car $p = n(k+1)$. Donc, $Card(A_p) = d(p)$.
4. On applique alors le théorème de sommation par paquets à la partition A_p pour obtenir :
   Le théorème de sommation par paquets nous dit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0} x^{n(k+1)} = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{(n,k)\in A_p} x^p = \sum_{p=1}^{+\infty} d(p)x^p.$$

Exercice 3.
Soit $n \geq 3$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules de l'urne, l'une après l'autre, sans les remettre. On note Ω l'ensemble de tous les tirages possibles (vus comme des n-uplets).

1. Combien vaut $Card(\Omega)$?
2. On note A l'ensemble de tous les tirages qui contiennent la séquence "$1, 2, 3$" (les boules $1, 2, 3$ sortent à la suite et dans cet ordre).
   Calculer $Card(A)$.
   On pourra faire des exemples pour de petites valeurs de n ($n = 3, 4, 5$), pour s'aider.
3. On note B l'ensemble de tous les tirages tels que 1 apparaît avant 2, et tels que 2 apparaît avant 3 (on tire 1 avant 2, et on tire 2 avant 3).
   Calculer $Card(A)$.

---

1. L'esemble Ω est :

   $$\Omega = \{(l_1, \ldots, l_n) \in [\![1, n]\!] / \text{ tels que } \forall i \neq j,\ l_i \neq l_j\}$$

   On a donc $\mathrm{Card}(\Omega) = n!$
2. Pour un tirage qui contient la séquence '$1, 2, 3$', la position de la boule 1 sera alors dans $\{1, \ldots, n-2\}$.
   Pour $1 \leq i \leq n-2$, on pose $A_i =$ {les tirages contiennent la séquence "1,2,3", et la boule 1 sort en position i}.
   Chaque ensemble A_i est non-vide, et tout élément de A est inclus dans un A_i. Chaque ensemble A_i est inclus dans A. Deux ensembles A_i et A_j, pour $i \neq j$, sont disjoints. Donc, les A_i forment une partition de A.
   On a donc $Card(A) = \sum_i Card(A_i)$. Les positions $i, i+1, i+2$ contiennent donc la séquence '$1, 2, 3$. Il reste $n-3$ positions pour $n-3$ numéros. Cela donne $(n-3)!$ arrangements possibles. Donc, $Card(A_i) = (n-3)!$.
   Ainsi, $Card(A) = \sum_i (n-3)! = (n-2)(n-3)!$.
3. Soient $1 \leq i < j < k \leq n$.
   On pose $B_{(i,j,k)}$ l'ensemble des tirages avec 1 en position i, 2 en position j, 3 en position k.
   On remarque alors que $B_{(i,j,k)}$ est inclus dans B, que $B_{(i,j,k)}$ est non-vide, et que tout élément de B est dans un $B_{(i,j,k)}$. De plus, pour $(i, j, k) \neq (i', j', k')$, les ensembles $B_{(i,j,k)}$ et $B_{(i',j',k')}$ sont disjoints.
   La famille des $B_{(i,j,k)}$ est donc une partition de B.
   Calculons les cardinaux.
   Pour un tirage dans $B_{(i,j,k)}$, les positions i, j, k sont occupées par $1, 2, 3$. Il reste $n-3$ positions pour $n-3$ numéros. Cela donne $(n-3)!$ arrangements possibles. Donc, $Card(B_{(i,j,k)} = (n-3)!$.
   Calculons le nombre de triplets (i, j, k) avec $1 \leq i < j < k \leq n$.
   Choisir un tel triplet revient à choisir trois nombres parmi $\{1, \ldots, n\}$. On a donc $\binom{n}{3}$ choix possibles.
   Ainsi, $Card(B) = \sum_{(i,j,k)} Card(B_{(i,j,k)} = \sum_{(i,j,k)} (n-3)! = \binom{n}{3}(n-3)! = \frac{n!}{6}$.

   Autre méthode : On pose $C_{(123)}, C_{(132)}, C_{(213)}, C_{(231)}, C_{(312)}, C_{(321)}$ les ensembles de tirages où 1,2,3 apparaissent dans l'ordre indiqué (pour $C_{(213)}$ on a 2 avant 1 et 1 avant 3).
   On a $B = C_{(123)}$.
   On remarque alors que ces ensembles sont disjoints, et forment une partition de Ω. De plus, ces ensembles sont de même cardinal (il suffit de permuter l'ordre de $1, 2, 3$ pour passer d'un ensemble à un autre).
   On a donc 6 ensembles de même cardinal qui forment une partition de Ω.
   Donc, ces ensembles sont de cardinal $\frac{Card(\Omega)}{6} = \frac{n!}{6}$.
   Ainsi, $Card(B) = \frac{n!}{6}$.

Exercice 4.

1. Vérifier que la famille des $A_k = \{(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n + p = k\}$, $k \geq 0$, forme une partition de $\mathbb{N}^2$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On regarde la famille $\left(\dfrac{1}{(n+p+1)^\alpha}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} = (a_{n,p})$.
   Calculer $\sum_{(n,p)\in A_k} a_{n,p}$.
3. En déduire tous les nombres réels α tels que la famille $\left(\dfrac{1}{(n+p+1)^\alpha}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Indiquer quel résultat du cours est nécessaire ici.
   Donner la valeur de la somme de la famille.

---

1. Chaque ensemble A_k est non-vide. Chaque ensemble A_k est inclus dans $\mathbb{N}^2$. Toute paire (n, p) est incluse dans A_{n+p}. Les ensembles A_k sont deux à deux disjoints. Ils forment bien une partition de $\mathbb{N}^2$.
2. On a une série à termes positifs. Le calcul donne :

   $$\sum_{(n,p)\in A_k} a_{n,p} = \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$$

   $$\sum_{(n,p)\in A_k} a_{n,p} = \frac{(k+1)}{(k+1)^\alpha} = \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}.$$
3. On a des séries à termes positifs. La somme des $\dfrac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}$ vaut $+\infty$ si $\alpha - 1 \geq 1$, et est finie sinon.
   Ainsi, d'après le cours (théorème de sommation par paquets), la famille

$$\left(\frac{1}{(n+p+1)^\alpha}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} \text{ si et seulement si } \alpha > 2.$$

Et, on a

$$\sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+p+1)^\alpha} = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}.$$

Exercice 5. Soit $n \geq 2$. Une assemblée comporte n personnes.
On s'intéresse aux dates d'anniversaire des n personnes. (On suppose que personne n'est né un 29 Février.)
Soit Ω l'ensemble de toutes les dates d'anniversaire possibles pour ces n personnes.

1. Donner une expression de Ω. Calculer $Card(\Omega)$.
   On pose A l'ensemble des configurations où au moins deux personnes ont la même date d'anniversaire.
2. Quel est l'ensemble $\bar{A}$?
3. Calculer $Card(\bar{A})$.
4. Calculer $Card(A)$.

---

1. Dans notre cas l'ensemble Ω est
$$\Omega = \{1, \dots, 365\}^n$$
On a donc $Card(\Omega) = 365^n$. Il y a 365^n répartitions possibles de dates d'anniversaires.
2. On a $A = \{$ « au moins deux invités ont la même date d'anniversaire » $\}$.
Ainsi, $\bar{A} = \{$ « tous les invités on une date d'anniversaire différente »$\}$.

3. Pour une répartition de $\bar{A}$, il faut choisir n dates d'anniversaires différentes parmi 365. On a donc
$$Card(\bar{A}) = \binom{365}{n} = \begin{cases} \dfrac{365!}{(365-n)!} & \text{si } n \leq 365 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
4. On en déduit que $Card(A) = Card(\Omega) - Card(\bar{A}) = 365^n - \binom{365}{n}$.

Exercice 6.

1. Soit $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent à
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$$
2. Pour quels nombres $\alpha > 1$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$ est-elle finie ?
3. On pose $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(n,k), k \geq n+1\}$. On pose $a_{n,k} = \frac{1}{k^\alpha}$. Pour quelles valeurs de $\alpha > 1$ la famille $(a_{n,k})_{(n,k)\in\Omega}$ est-elle sommable ?
4. Montrer qu'on a alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^{\alpha-1}}$$
On pourra écrire autrement l'ensemble Ω et utiliser le théorème de Fubini.

---

1. Pour $n \geq 2$, $\int_n^{n+1}\frac{1}{t^\alpha}\,dt \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n}\frac{1}{t^\alpha}\,dt$ puisque $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante. En sommant, ou en utilisant directement le théorème de comparaison série intégrale on obtient
$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} = \int_{n+1}^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n}^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$
On en déduit que $R_n \sim \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.
2. D'après la question précédente, la somme est convergente ssi $\alpha > 2$, d'après la comparaison avec une série de Riemann.
3. La double somme étant à termes positifs, la famille est sommable. Elle est indexée par
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(n,k), k \geq n+1\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty}\{(n,k),\ 0 \leq n \leq k-1\},$$
les unions étant disjointes. 0n peut intervertir les deux sommes (Fubini)
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(k \times \frac{1}{k^\alpha}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

Exercice 7. (*)
Soient $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$. On note $D_{n,k}$ le nombre de permutations sur $\{1, \dots, n\}$ avec k points fixes.
On pose $D_{0,0} = 1$ et $d_n = D_{n,0}$.
d_n est le nombre de permutations sans point fixe.

1. Dresser la liste de toutes les permutations de $\{1,2,3\}$ et en déduire la valeur de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,3}$.

2. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$.
3. Montrer que $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}$.
4. Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} \dfrac{d_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
5. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que $(\exp x) f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.
6. En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.
7. Montrer que la proportion de permutations sans point fixes de S_n converge vers un nombre réel l, que l'on déterminera.

---

1. Puisque $\{1,2,3\}$ a trois éléments, il existe exactement 6 bijections différentes de $\{1,2,3\}$ dans lui-même :
   — l'identité ;
   — les 3 transpositions $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, $(2\ 3)$.
   — les 2 cycles $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 3\ 2)$.

   L'identité a 3 points fixes, les transpositions en ont 1 et les cycles n'en ont pas. On en déduit que
   $$D_{3,0} = 1,\ D_{3,1} = 3,\ D_{3,2} = 0 \text{ et } D_{3,3} = 1.$$
2. Si on note A_k l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,n\}$ ayant k point fixes, alors la famille $A_0,\dots,A_n$ forme une partition de l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,n\}$. Ainsi, on a bien $n! = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{card}(A_k) = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$.
3. Pour chaque permutation ayant k points fixes, il y a
   — $\binom{n}{k}$ choix possibles de ces k points fixes (choisir k éléments parmi n) ;
   — ce choix effectué, la permutation agit comme une permutation sans point fixe sur les $n-k$ éléments restants. Il y a $D_{n-k,0}$ telles permutations.

   Le nombre de permutations ayant k points fixes vaut donc $\binom{n}{k} D_{n-k,0}$.
4. Clairement, on a $0 \leq d_n \leq n!$, soit $\frac{|d_n||z|^n}{n!} \leq |z|^n$. La série converge absolument si $|z| < 1$, son rayon de convergence est au moins égal à 1.
5. Puisque les séries entières définissant $\exp x$ et $f(x)$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, leur produit de Cauchy est absolument convergent pour $|x| < 1$. De plus, on a
   $$(\exp x) f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \text{ avec } b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{(n-k)!} \times \frac{1}{n!}.$$
   Mais
   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} D_{n,k} = 1.$$
   On obtient
   $$(\exp x) f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$
6. De l'égalité $(\exp x) f(x) = \frac{1}{1-x}$, on tire
   $$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$
   On réalise le produit de Cauchy des deux séries entières obtenues à droite et on trouve
   $$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \text{ avec } c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$
   Par identification, on obtient bien $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
7. La proportion cherchée est $p_n = d_n/n! = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. On veut calculer la limite de cette quantité.
   En utilisant le développement en série entière de $\exp(-x)$, on trouve que cette probabilité converge vers $\exp(-1) = 1/e$.

Exercice 8.
Soit Ω l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. Montrer que Ω est dénombrable.
On pourra utiliser le fait que la réunion dénombrable d'ensembles dénombrables ou finis est dénombrable.

Une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables ou finis est encore au plus dénombrable.

Les éléments de Ω sont des parties de $\mathbb{N}$.

On pose $\Omega_n = \Omega \cap \mathcal{P}(\{0,\dots,n\})$, l'ensemble des éléments de Ω qui sont inclus dans $\{0,\dots,n\}$.

Pour A une partie finie de $\mathbb{N}$, il existe toujours un entier $n \geq 0$ tel que $A \subset \{0,\dots,n\}$. On a donc $\Omega = \cup_{n\geq 0} \Omega_n$.

L'ensemble Ω_n est inclus dans $\mathcal{P}(\{0,\dots,n\})$, ensemble fini de cardinal 2^{n+1}.

Ainsi, Ω est égal à la réunion dénombrable d'ensembles finis (ou dénombrables). Donc Ω est dénombrable.

Mesures de probabilités

Exercice 9. On lance deux dés à 6 faces.
• Quel est l'ensemble Ω des résultats possibles ? Donner son cardinal.
On suppose que les dés sont équilibrés et lancés sans aucun biais.
• Quelle est la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ qui correspond à ce lancer ?
• Quelle est la probabilité que :

1. « au moins un des dés marque 6 » ?
2. « au moins un des dés donne un résultat pair » ?
3. « la somme des résultats des deux dés soit paire » ?

On lance deux dés. L'ensemble des résultats possibles (l'univers) est donc

$$\Omega = [\![1,6]\!]^2$$

Il y a $6 \times 6 = 36$ cas possibles.
• La mesure de probabilité $\mathbb{P}$ associée à l'expérience est la mesure uniforme sur Ω.
Pour $A \subset \Omega$, on a $\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$. On va donc compter le nombre d'éléments de A (le nombre de cas favorables) pour calculer $\mathbb{P}(A)$ dans chaque cas.

1. Il y a 11 cas favorables, donc la probabilité est de $\frac{11}{36}$.
2. Il y a 27 cas favorables, donc la probabilité est de $\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$.
3. Il y a 18 cas favorables, donc la probabilité est de $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Exercice 10.
Soit $n \geq 3$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules de l'urne, l'une après l'autre, sans les remettre. On note Ω l'ensemble de tous les tirages possibles (vus comme des n-uplets).
On munit le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la mesure de probas uniforme $\mathbb{P}$.

1. On note C l'ensemble de tous les tirages qui commencent par 1.
Calculer $\mathbb{P}(C)$.
Quelle est la limite de cette quantité quand $n \to +\infty$?
2. On note A l'ensemble de tous les tirages qui contiennent la séquence "$1, 2, 3$" (les boules $1, 2, 3$ sortent à la suite et dans cet ordre).
Calculer $\mathbb{P}(A)$.
Quelle est la limite de cette quantité quand $n \to +\infty$?
3. On note B l'ensemble de tous les tirages tels que 1 apparaît avant 2, et tels que 2 apparaît avant 3 (on tire 1 avant 2, et on tire 2 avant 3).
Calculer $\mathbb{P}(A)$.
Quelle est la limite de cette quantité quand $n \to +\infty$?

Pour la mesure de probas uniforme, il faut dénombrer chaque ensemble pour calculer des probabilités.
On rappelle que $Card(\Omega) = n!$

1. On a $Card(C) = (n-1)!$. Pour un tirage tel que 1 sort en première position, il reste $n-1$ positions pour $n-1$ boules.
Ainsi $\mathbb{P}(C) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.
Cette probabilité tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
2. On avait trouvé la semaine dernière : $Card(A) = (n-2)(n-3)! = (n-2)!$.
Donc, $\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$.
Cette probabilité tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
3. On avait trouvé la semaine dernière $Card(B)\frac{n!}{6}$.
Donc, $\mathbb{P}(B) = \frac{Card(B)}{n!} = \frac{1}{6}$.
Cette probabilité ne dépend pas de n, elle est constante, donc de limite $\frac{1}{6}$.
Quand n grandit, les événements A et C deviennent de "plus en plus rares", tandis que B reste "fréquent".

Exercice 11.

1. Soit $m \geq 1$. Sur $\{1, \ldots, m\}$ écrire la mesure de probabilité uniforme U comme somme de mesures de *Dirac* δ_w.
Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une sigma-algèbre sur Ω.
Soient $P_1, \ldots, P_m$ des mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Soient $p_1, \ldots, p_m \in [0,1]$ des réels tels que $p_1 + \ldots + p_m = 1$.
2. Montrer que la fonction $\mathbb{P} = \sum_{k=1}^m p_k P_k$ est une mesure de probabilité.
Soient maintenant $(Q_n)_{n\geq 0}$ des mesures de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et $(q_n)_{n\geq 0}$ des réels positifs tels que $\sum_{k\geq 0} q_k = 1$.
3. Montrer que la fonction $f = \sum_{k\geq 0} q_k Q_k$ est bien définie sur $\mathcal{A}$.
4. On veut montrer que f est une mesure de probabilité. Quel théorème du cours est utile dans la preuve ?

---

1. On a $U = \sum_{k=1}^m \frac{1}{m}\delta_k$.
2. Il faut montrer les deux conditions de la définition de mesure de probas.
Premièrement, on a $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_k p_k = 1$.
Ensuite, soit $(A_l)_{l\geq 0}$ une famille de parties disjointes de Ω, contenues dans $\mathcal{A}$.
On a alors $\mathbb{P}(\bigcup_l A_l) = \sum_{k=1}^m p_k P_k(\bigcup_l A_l) = \sum_{k=1}^m p_k \sum_{l\geq 0} P_k(A_l) =$

$\sum_{l\geq 0}\sum_k p_k P_k(A_l) = \sum_{l\geq 0}\mathbb{P}(A_l)$.
Donc $\mathbb{P}$ est bien une mesure de probas.

3. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $Q_k(A) \in [0,1]$. La série des $q_k Q_k(A)$ est une série à termes positifs, et $q_k Q_k(A) \leq q_k$.
Comme on a $\sum_{k\geq 0} q_k = 1$, on en déduit que la série des $q_k Q_k(A)$ est convergente (série à termes positifs qui est majorée).
Donc, $f(A) = \sum_{k\geq 0} q_k Q_k(A)$ est bien défini.
4. Pour montrer que f est une mesure de probabilité, il faut utiliser un théorème d'interversion de sommes.
On que $f(\Omega) = \sum_{k\geq 0} q_k = 1$.
Et, pour $(A_l)_{l\geq 0}$ une famille de parties disjointes de Ω, contenues dans $\mathcal{A}$, on va vouloir montrer que $\sum_k q_k \sum_l Q_k(A_l) = \sum_l \sum_k q_k Q_k(A_l)$ (d'un côté cela vaut $f(\bigcup_l A_l)$, de l'autre cela vaut $\sum_l f(A_l)$).
Comme on regarde des sommes de réels positifs, on peut utiliser le théorème de Fubini ou le théorème de sommation par paquets.

Exercice 12. Soit Ω un ensemble non-vide. Soit A une partie de Ω.
• Quelles sont les 3 opérations que l'on peut faire dans une sigma-algèbre ? Quels sont les éléments toujours présents dans une sigma-algèbre ?
• Montrer que $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ est une sigma-algèbre.
• Si Ω est fini ou dénombrable, quelle est la seule sigma-algèbre sur Ω qui contient tous les singletons ?

• Une sigma-algèbre est stable par passage au complémentaire, réunion dénombrable, intersection dénombrable. Une sigma-algèbre contient toujours $\emptyset$ et Ω.

• $\mathcal{A}$ contient $\emptyset$ et Ω. Pour tout élément B dans $\mathcal{A}$, $\bar{B}$ est aussi dans $\mathcal{A}$.

Pour toute famille d'éléments $(B_n)_n$ dans $\mathcal{A}$, l'intersection $\bigcup_n B_n$ est encore un élément de $\mathcal{A}$, et la réunion $\bigcap_n B_n$ est encore un élément de $\mathcal{A}$.

Cet ensemble est donc bien stable par complémentaire, réunion dénombrable, intersection dénombrable. C'est une sigma-algèbre sur Ω.

• C'est $\mathcal{P}(\Omega)$.

Exercice 13. Soit $n \geq 2$. Une assemblée comporte n personnes.
On s'intéresse aux dates d'anniversaire des n personnes. (On suppose que personne n'est né un 29 Février.)
Soit Ω l'ensemble de toutes les dates d'anniversaire possibles pour ces n personnes.

1. Donner une expression de Ω. Calculer $Card(\Omega)$.
On suppose que les personnes de l'assemblée ont été choisies sans aucun biais parmi la population.
2. Quelle mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ correspond à ce choix ?
On pose A l'ensemble des configurations où au moins deux personnes ont la même date d'anniversaire.
3. Calculer $\mathbb{P}(\bar{A})$.
4. Calculer $\mathbb{P}(A)$.

---

1. Dans notre cas l'ensemble Ω est
$$\Omega = \{1, \ldots, 365\}^n$$
On a donc $Card(\Omega) = 365^n$. Il y a 365^n répartitions possibles de dates d'anniversaires.
2. C'est la mesure de probabilité uniforme.
3. On a $\bar{A} = \{$ « tous les invités on une date d'anniversaire différente »$\}$. Donc, $Card(\bar{A}) = \binom{365}{n}$.
Ainsi, $\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{\binom{365}{n}}{365^n}$.
4. On en déduit que $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{365}{n}}{365^n}$.
Quand $n \geq 366$, on a $\mathbb{P}(A) = 1$.
Pour $2 \leq n \leq 365$, on a $\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{365\times\ldots(365-n+1)}{365^n}\frac{1}{n!}$.
Cette probabilité croit vers 1 plus vite qu'on le pense.
Lorsqu'il y a plus 40 personnes la probabilité $P(A)$ est supérieure à $0,9$.

Exercice 14.
Soient $1 \leq p \leq n$. Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments.
On pose sur le couple $(\mathcal{P}(E), \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)))$ la mesure de probabilité uniforme $\mathbb{P}$.

1. Combien vaut $Card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)))$?
2. Donner les valeurs de $\mathbb{P}(\emptyset)$ et $\mathbb{P}(\{\emptyset\})$.
3. On pose B l'ensemble des parties de E telles qui contiennent exactement un élément de A.
Calculer $\mathbb{P}(B)$.
Comment varie cette probabilité en fonction de n et de p ?

---

1. On a $Card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))) = 2^{2^n}$.
2. On a $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ (partie à 0 éléments de $\mathcal{P}(E)$) et $\mathbb{P}(\{\emptyset\}) = \frac{1}{2^n}$ (partie à 1 élément de $\mathcal{P}(E)$).
3. On a calculé la semaine dernière que $Card(B) = p2^{n-p}$.
   On obtient ainsi $\mathbb{P}(B) = \frac{Card(B)}{Card(\mathcal{P}(E))} = \frac{p}{2^p}$.
   La probabilité obtenue ne dépend pas de n, le nombre d'éléments de E.
   Pour $p \geq 1$, cette probabilité est décroissante quand p croit, et tend vers 0 quand $p \to +\infty$.

Exercice 15.
Soit $n \geq 1$. Soit $E = \{1, \ldots, n\}$.

1. Exprimer la mesure de probas uniforme U sur $(E, \mathcal{P}(E))$ comme combinaison linéaire de mesures de Dirac δ_ω. On pose $f = \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}\delta_n$.
2. Quelle expérience aléatoire peut être associée à la mesure de probabilité f ?
3. Calculer $f(\{1, n\})$ et $f(2\mathbb{N} \cap E)$.

---

1. On a $U = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_k$.
2. Dans une expérience où on lance un dé à n faces, et que la face n est truquée (probabilité $1/2 + \frac{1}{2n}$ de sortir), on va associer la mesure de probabilité f.
   Ou bien, on prend des boules numérotées de 1 à n. Dans une urne, on place 1 copie des boules numéro $1, 2, \ldots, n-1$, et $n+1$ copies de la boule numéro n.
   Puis, sans biais (au hasard de façon uniforme), on tire une boule, et on regarde son numéro. L'ensemble E représente le numéro obtenu, et f sera la mesure de probas associée à l'expérience.
3. Pour $n = 1$ on a $f(\{1, n\}) = 1$.
   Sinon, on a $f(\{1, n\}) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \frac{n+2}{2n}$.
   Si n est impair, on a $f(2\mathbb{N} \cap E) = \frac{1}{2}U(2\mathbb{N} \cap E) = \frac{1}{2}\frac{n-1}{2}\frac{1}{n} = \frac{n-1}{4n}$.
   Si n est pair, on a $Card(2\mathbb{N} \cap E) = \frac{n}{2}$. Donc, $f(2\mathbb{N} \cap E) = \frac{1}{2}\frac{n}{2}\frac{1}{n} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Exercice 16. Dans un jeu de 32 cartes, on a remplacé une carte autre que l'as de pique (♠) par un second as de pique.
Un joueur choisit au hasard de façon uniforme 3 cartes.
• Quel ensemble Ω et quelle mesure de probabilité $\mathbb{P}$ faut-il prendre pour modéliser cette expérience ?
• Quelle est la probabilité qu'il s'aperçoive de la tricherie ?

Le joueur pioche 3 cartes parmi 32, sans remise. L'univers Ω est donc l'ensemble des parties à 3 éléments d'un ensemble à 32 éléments.
Si on numérote ces cartes de 1 à 32, en prenant par exemple que les deux as de pique ont les numéros 1 et 2, on obtient : $\Omega = \{A \subset \{1, \ldots, 32\}$ tels que $Card(A) = 3\}$.
Il y a $\binom{32}{3}$ cas possibles.
La pioche est au hasard de façon uniforme, donc on munit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la mesure de probabilité uniforme $\mathbb{P}$.
Il doit piocher les 2 as de pique pour se rendre compte de la tricherie.
Pour piocher les 2 as de pique, il faut donc piocher un ensemble de trois cartes qui contient ces deux as.
C'est équivalent à piocher une carte dans les 30 autres cartes qui ne sont pas des as de pique.
L'ensemble des cas favorables contient donc 30 éléments.
La probabilité est donc de $\frac{30}{\binom{32}{3}} = \frac{3}{496}$.

Exercice 17. Soit $N > 0$. Une boîte contient $2N$ boules numérotées de 1 à $2N$. On tire N boules successivement sans les remettre.

1. Donner l'ensemble Ω qui représente tous les tirages possibles.
   Calculer $Card(\Omega)$. On note l'événement.
   $$A : \text{« on tire au moins un numéro inférieur ou égal à } N \text{ »}$$
   .
2. Calculer $Card(\bar{A})$, et en déduire $Card(A)$.
   On suppose que les boules sont toutes identiques (sauf leur numéro), et qu'on mélange les boules de la boîte avant chaque tirage.
3. Quelle mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ correspond à cette façon de tirer les boules ?
4. Calculer $\mathbb{P}(A)$.
5. En utilisant la formule de Stirling
   $$N! \sim \left(\frac{N}{e}\right)^N \sqrt{2\pi N},$$

étudier la limite de $P(A)$ quand N tend vers ∞ ?

---

1. Ω est l'ensemble de N-uplets de nombres entiers, à valeurs dans $\{1,\dots,2N\}$, qui sont tous distincts. C'est un sous-ensemble de $\{1,\dots,2N\}^N$, qui s'écrit aussi
$$\Omega = \{(n_1,\dots,n_N) \in [\![1,2N]\!] \forall i \neq j,\ n_i \neq n_j\}$$
Un tirage de N boules revient à choisir N numéros parmi $2N$, puis à les ordonner. Il y a $N!$ ordres possibles.
On a ainsi $Card(\Omega) = \binom{2N}{N}.N! = \frac{(2N)!}{N!}$.
2. L'ensemble $\bar{A}$ est donc :
$$\bar{A} = \{(n_1,\dots,n_N) \in [\![N+1,2N]\!] \forall i \neq j,\ n_i \neq n_j\}$$
Avec le même raisonnement, cet ensemble contient $\binom{N}{N}N! = N!$ éléments. D'où
$$P(\bar{A}) = \frac{(N!)^2}{(2N)!} \text{ et } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{(N!)^2}{(2N)!}$$
3. D'après la formule de Stirling, on a :
$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= \frac{(N!)^2}{(2N)!} \\ &\underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{\left(\left(\frac{N}{e}\right)^N \sqrt{2\pi N}\right)^2}{\left(\frac{2N}{e}\right)^{2N}\sqrt{4\pi N}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi N}}{4^N} \end{aligned}$$
Donc quand N tend vers $+\infty$ la probabilité de $\bar{A}$ tend vers 0 et donc celle de A tend vers 1. Cela correspond à l'intuition : "quand N est grand, aussi grand que l'on veut, il est très rare de ne tirer aucune boule de numéro entre $N+1$ et $2N$".

Exercice 18. Soient $\Omega = \{a,b,c\}$ un ensemble et $x,\ y$ deux réels.
Montrer qu'il existe une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que
$$\mathbb{P}(\{a,b\}) = x \text{ et } \mathbb{P}(\{b,c\}) = y$$
si et seulement si $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ et $x + y \geq 1$.
On pourra s'aider de l'exercice ..

Supposons qu'il existe une mesure de probas $\mathbb{P}$ vérifiant les propriétés. On a :
- $x = P(\{a,b\}) \in [0,1]$ et $y = P(\{b,c\}) \in [0,1]$;
- $1 = P(\{a,b,c\}) \leq P(\{a,b\}) + P(\{b,c\}) = x + y$.

Réciproquement, supposons que x et y vérifient les trois inégalités.
On note :
$$\begin{aligned} p_2 &= x + y - 1 \\ p_1 &= x - p_2 \\ p_3 &= y - p_2 \end{aligned}$$
On pose $\mathbb{P} = p_1\delta_a + p_2\delta_b + p_3\delta_c$. Les réels p_1, p_2, p_3 sont bien positifs, et on a $p_1 + p_2 + p_3 = x - p_2 + p_2 + y - p_2 = x + y - p_2 = 1$.
Donc, d'après l'exercice .., $\mathbb{P}$ est une mesure de probas.
On a de plus : $\mathbb{P}(\{a,b\}) = p_1 + p_2 = x$ $\mathbb{P}(\{b,c\}) = p_2 + p_3 = y$.

Exercice 19. Soit Ω un ensemble. Soient $A_n \subset \Omega$.
On appelle *limite supérieure* des A_n, notée $\limsup_n A_n$, l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à une infinité de A_n.
On appelle *limite inférieure* des A_n, notée $\liminf_n A_n$, l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à tous les A_n, sauf un nombre fini d'entre eux.

1. Écrire les définitions de $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ avec les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.
Les traduire en termes ensemblistes à l'aide de $\bigcap$ et $\bigcup$.
2. Soit $\mathcal{A}$ une σ-algèbre sur Ω.
Montrer que si $A_n \in \mathcal{A}$, alors $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ appartiennent aussi à $\mathcal{A}$.
3. Déterminer les ensembles $\limsup_n A_n$ et $\liminf_n A_n$ dans les cas suivants :
   (a) $A_n =]-\infty, n]$;
   (b) $A_n =]-\infty, -n]$;
   (c) $A_{2n} = A,\ A_{2n+1} = B$;
   (d) $A_n =]-\infty, (-1)^n]$.

---

1. $\liminf_n A_n = \{\omega \in \Omega \text{ t.q. } \exists n \geq 0 \text{ t.q. } \forall k \geq n \text{ on a } \omega \in A_k\} = \bigcup_{n\geq 0}(\bigcap_{k\geq n} A_k)$.
$\limsup_n A_n = \{\omega \in \Omega \text{ t.q. } \forall n \geq 0, \forall k \geq n \text{ avec } \omega \in A_k\} = \bigcap_{n\geq 0}(\bigcup_{k\geq n} A_k)$.
2. Ce sont des réunions dénombrables d'intersections dénombrables (ou intersec dénombrables de réunions dénombrables) d'éléments de $\mathcal{A}$. Donc, ces ensembles sont des éléments de $\mathcal{A}$.

3. $\liminf_n(]-\infty,n]) = \mathbb{R} = \limsup_n(]-\infty,n])$.
4. $\liminf_n(]-\infty,-n]) = \emptyset = \limsup_n(]-\infty,-n])$.
5. $\liminf_n A_n = A\cap B$, $\limsup_n A_n = A\cup B$.
6. $\liminf_n A_n =]-\infty,-1]$, $\limsup_n A_n =]-\infty,1]$.

Exercice 20. Soient $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $A_1,\dots,A_n$ des événements. Démontrer que

$$\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n) \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - (n-1).$$

On va procéder par récurrence sur $n\geq 1$. Le point clé est la formule

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cup B).$$

La propriété est vraie si $n=1$. Supposons-la vraie jusqu'au rang $n-1$, et prouvons-la au rang n. On pose $A = A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}$ et $B = A_n$. Alors, d'après la formule précédente

$$\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n) = \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cup B).$$

Maintenant, on utilise l'hypothèse de récurrence pour minorer $\mathbb{P}(A)$, et on utilise le fait que $\mathbb{P}(A\cup B)\leq 1$, et on obtient

$$\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(A_i) - (n-2) + P(A_n) - 1$$

ce qui est exactement le résultat voulu.

Probabilités conditionnlles, événements indépendants

Exercice 21.
Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soient A et B deux événements de $\mathcal{A}$ tels que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8} \quad , \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A\cap B) = \frac{1}{4}.$$

Calculer $\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B})$.

On a $\overline{A}\cap\overline{B} = \overline{A\cup B}$. Donc

$$\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}) = 1-\mathbb{P}(A\cup B) = 1-(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)) = 1-\frac{3}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B}) &= \frac{\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B})}{\mathbb{P}(\overline{B})}\\ &= \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Exercice 22. Soient $N\geq 2$ et $p\in[0,1]$.
On place N coffres dans une pièce. Avec une probabilité p on place un trésor dans l'un de ces coffres. Si on place le trésor, on choisit un coffre de façon équiprobable ("même probabilité").
• Donner un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ qui modélise l'expérience.
On pourra écrire la loi de la mesure de probas $\mathbb{P}$.
• Une personne a ouvert $N-1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'elle trouve le trésor dans le dernier coffre ?
• Donner un équivalent de cette probabilité quand $N\to+\infty$.

• On prend $\Omega = \{0,\dots,N\}$.
Les nombres $1,\dots,N$ décrivent le numéro du coffre dans lequel est le trésor, et 0 désigne le fait que le trésor n'est dans aucun coffre.
Avec ce que dit l'énoncé, on a $\mathbb{P}(\{0\}) = 1-p$, et $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{p}{N}$, pour tout $1\leq i\leq N$ (proba p que le trésor soit dans un coffre, et la proba que le trésor soit dans un coffre donné ne dépend pas du numéro du coffre).
• Pour $1\leq i\leq N$, considérons l'événement A_i : un trésor est placé dans le coffre d'indice i (c'est-à-dire $A_i = \{i\}$).
On a donc $\mathbb{P}(A_i) = \dfrac{p}{N}$, et tous ces événements sont disjoints. La probabilité que l'on demande de calculer est :

$$\mathbb{P}(A_n|\overline{A}_1\cap\cdots\cap\overline{A}_{N-1})$$

Mais

$$\mathbb{P}(\overline{A}_1\cap\cdots\cap\overline{A}_{N-1}) = 1-\mathbb{P}(A_1\cup\cdots\cup A_{N-1}) = 1-\frac{p(N-1)}{N} = \frac{N-p(N-1)}{N}$$

et

$$\mathbb{P}(A_n\cap\overline{A}_1\cap\cdots\cap\overline{A}_{N-1}) = \mathbb{P}(A_N) = \frac{p}{N}$$

donc

$$\mathbb{P}(A_N|\overline{A}_1\cap\cdots\cap\overline{A}_{n-1}) = \frac{p}{N-(N-1)p}$$

Quand N tend vers $+\infty$, cette probabilité est équivalente à $\frac{p}{N(1-p)}$.

Exercice 23. Vous êtes devant une porte fermée. Vous avez n clefs. Une seule clef ouvre la porte. Vous décidez d'essayer les clefs l'une après l'autre, au hasard uniforme.

1. Quel est l'univers Ω ?
   On ne cherchera pas à calculer explicitement la mesure de probas $\mathbb{P}$ qui modélise cet exemple.
2. Soit, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, l'événement E_i : « le i-ème essai est un échec ». Calculer $\mathbb{P}(E_1)$ et $\mathbb{P}(E_2 \mid E_1)$.
3. Pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer l'événement S_k : « la porte s'ouvre au k-ième essai » en utilisant les événements E_i et leur contraire.
4. En déduire la probabilité u_k que la porte s'ouvre au k-ième essai.
5. Retrouver directement ce résultat en utilisant un ensemble Ω' plus simple, muni de la mesure uniforme, grâce à un argument de probabilités égales (d'équiprobabilité).

---

1. On numérote les clefs de 1 à n et note l le numéro de la clef qui ouvert la porte. L'univers est alors l'ensemble des suites $(i_1, \dots, i_k)$ de numéros deux à deux distincts tels que $i_k = l$.
2. L'événement E_1 est réalisé si la première clef choisie n'est pas la bonne. On a donc
$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{n-1}{n}$$
De même, l'événement $E_1 \cap E_2$ est réalisé si les deux premières clefs choisies ne sont pas la bonne. On a
$$\mathbb{P}(E_2 \mid E_1) = \frac{\mathbb{P}(E_1 \cap E_2)}{\mathbb{P}(E_1)} = \frac{\frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)}}{\frac{n-1}{n}} = \frac{n-2}{n-1}.$$
3. L'événement S_k est réalisé si pour tout $j \in [\![1, k-1]\!]$, E_j est réalisé et $\overline{E}_k$ est réalisé. On a donc :
$$S_k = E_1 \cap \ldots \cap E_{k-1} \cap \overline{E}_k.$$
4. On a :
$$\begin{array}{rcl} u_k & = & \mathbb{P}(S_k) \\ & = & \mathbb{P}(E_1 \cap \ldots \cap E_{k-1} \cap \overline{E}_k) \\ & = & \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2 \mid E_1) \ldots \mathbb{P}(E_{k-1} \mid E_1 \cap \ldots \cap E_{k-2})\mathbb{P}(\overline{E}_k \mid E_1 \cap \ldots \cap E_{k-1}) \\ & = & \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{n-k+1}{n-k+2}\frac{1}{n-k+1} \\ & = & \frac{1}{n} \end{array}$$
5. On modifie l'expérience. On tire toute les clefs en conservant l'ordre dans lequel on tire ces clefs. L'univers contient alors $n!$ éléments. Un réslutat $(i_1, \dots, i_n)$ réalise S_k si $i_k = l$. Il y a donc $(n-1)!$ cas favorables pour $n!$ possibles. On obtient donc de nouveau l'égalité :
$$u_k = \frac{1}{n}$$

Exercice 24. Soient $b, d, r \geq 0$.
Une urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges. On réalise l'expérience suivante :
• On tire une boule de l'urne au hasard uniforme, et on note sa couleur.
• On remet la boule dans l'urne, et on ajoute d boules de la même couleur.
On répète l'expérience autant de fois que l'on veut.
Soit $n \geq 1$. Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche lors du n-ième tirage.
On pourra utiliser une récurrence, et des probabilités conditionnelles sachant le résultat du 1er tirage.

On pose B_i l'événement "une boule blanche est tirée au i-ème tirage".
On pose R_i l'événement "une boule rouge est tirée au i-ème tirage".
Au premier tirage, on a $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{b}{b+r}$.
Pour le second tirage, on calcule :
$$\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) = \frac{b+d}{b+d+r} \times \frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+d+r} \times \frac{r}{b+r} = \frac{b}{b+r}.$$
On va démontrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $\mathbb{P}(B_n) = \dfrac{b}{b+r}$.
Initialisation : Ok.
Hérédité : Soit $n \geq 1$. On suppose que le résultat est vrai pour $n \geq 1$.
On ne peut pas utiliser $\mathbb{P}(B_{n+1}|B_n)$ dans nos calculs, car on ne sait pas exactement combien de boules sont contenues dans l'urne quand B_n est vrai (l'événement B_n ne donne pas le nombre de boules dans l'urne). A part B_1.
Regardons $\mathbb{P}(B_{n+1}|B_1)$. Après 1 tirage, si B_1 est vrai, on a $b+d$ boules blanches et r boules rouges. Pour arriver à $n+1$ tirages, il reste donc n tirages à faire.
Cela revient exactement à faire n tirages en commençant avec $b' = b+d$ boules blanches et $r' = r$ boules rouges.
Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $\mathbb{P}(B_{n+1}|B_n) = \frac{b'}{b'+r'} = \frac{b+d}{b+d+r}$.
De même, regardons $\mathbb{P}(B_{n+1}|R_1)$. Après 1 tirage, si R_1 est vrai, on a b boules blanches et $r+d$ boules rouges. Pour arriver à $n+1$ tirages, il reste donc n tirages à faire.
Cela revient exactement à faire n tirages en commençant avec $b' = b$ boules blanches et $r' = r+d$ boules rouges.
Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $\mathbb{P}(B_{n+1}|B_1) = \frac{b'}{b'+r'} = \frac{b}{b+d+r}$.
On obtient ainsi :
$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_{n+1}|R_1)\mathbb{P}(R_1) = \frac{b+d}{b+d+r} \times \frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+d+r} \times \frac{r}{b+r} = \frac{b}{b+r}.$$